

HUMAN-CENTERED ROBOTICS

BASI DEL MOVIMENTO

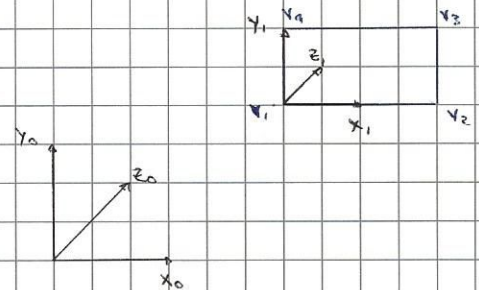
IL MOVIMENTO È LO SPOSTAMENTO DI UN INSIEME DI PUNTI, DI MATERIA, SECONDO UN QUALCHE SISTEMA DI RIFERIMENTO CARTESIANO DI 3 ASSI. I MOVIMENTI POSSIBILI SONO LA TRASLAZIONE E LA ROTAZIONE E IL PROBLEMA È QUELLO DI CONOSCERE LA POSIZIONE E L'ORIENTAMENTO DEGLI OGGETTI IN RIFERIMENTO AD UN SISTEMA DI RIFERIMENTO ESTERNO.

$${}^1V_1 = (0, 0, 0)^T \Rightarrow {}^0V_1 = ?$$

$${}^1V_2 = (2, 0, 0)^T \Rightarrow {}^0V_2 = ?$$

$${}^1V_3 = (2, 1, 0)^T \Rightarrow {}^0V_3 = ?$$

$${}^1V_4 = (0, 1, 0)^T \Rightarrow {}^0V_4 = ?$$

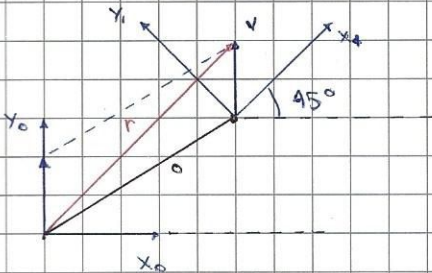


SE DUE VETTORI SONO NELLO STESSO SISTEMA DI RIFERIMENTO SI POSSONO SOMMARE TRAMITE LA REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA PER STABILIRE IL VETTORE RISULTANTE. PER TRASPORRE UN VETTORE IN UN ALTRO SISTEMA DI RIFERIMENTO SI OPERA ^{LA} SOMMA TRA IL VETTORE, CHE DAL SECONDO PUNTA AL CORRENTE SISTEMA NELL'ORIGINE, E ~~QUESTO~~ QUESTO RAPPRESENTATO SECONDO IL NUOVO SISTEMA:

$${}^0V = 0_0 + {}^0V$$

DOVE 0V È L'ESPRESSIONE DI 1V NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO 0

EX.

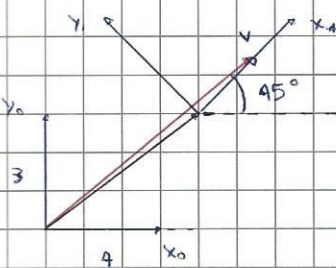


$${}^1V = (1, 1, 0)^T \Rightarrow |{}^1V| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$${}^0V = 0_0 + {}^0V$$

$${}^0V = (0, \sqrt{2}, 0)^T$$

EX.



$${}^1V = (\sqrt{2}, 0, 0)^T$$

$$\Rightarrow x_0^V = \sqrt{2} \cdot \cos(45^\circ) = 1$$

$${}^0O = (4, 3, 0)^T$$

$$y_0^V = \sqrt{2} \cdot \sin(45^\circ) = 1$$

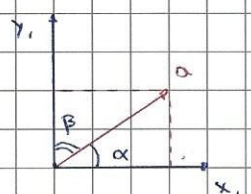
$$\Rightarrow {}^0V = (5, 4, 0)^T$$

SECONDO EULERO LE 3 COMPONENTI DEL VETTORE POSSONO ESSERE ESPRESSE COME

$$a \cdot x_i = |a| \cdot |x_i| \cdot \cos \alpha$$

$$a \cdot y_i = |a| \cdot |y_i| \cdot \sin \alpha$$

DOVE x_i, y_i SONO VETTORI



CHE SI PUÒ RISCRIVERE CONE

$$\left. \begin{aligned} {}^1a_{x1} &= a^T x_1 \\ {}^1a_{y1} &= a^T y_1 \\ {}^1a_{z1} &= a^T z_1 \end{aligned} \right\} = {}^1a \quad \text{E CON LA STESSA LOGICA} \quad {}^2a = \begin{bmatrix} a^T x_2 \\ a^T y_2 \\ a^T z_2 \end{bmatrix}$$

L'OBIETTIVO ORA È DETERMINARE LA MATRICE CHE PERMETTE DI PASSARE DA UN SISTEMA DI RIFERIMENTO AD UN ALTRO

$${}^1a = [?] {}^2b$$

$m \times 1 \quad m \times m \quad m \times 1$

INNAZITUTTO 1b PUÒ INIZIALMENTE ESSERE DESCRITTO IN QUESTO MODO

$${}^1b = b_{x2} {}^1x_2 + b_{y2} {}^1y_2 + b_{z2} {}^1z_2$$

DUNQUE GLI ASSI CHE DEFINISCONO IL SECONDO SISTEMA DI RIFERIMENTO DEVONO ESSERE ESPRESSI SECONDO IL PRIMO

SECONDO QUANTO STABILITO PRIMA PER UN GENERICO VETTORE

$${}^1x_2 = \begin{bmatrix} x_2^T x_1 \\ x_2^T y_1 \\ x_2^T z_1 \end{bmatrix} \quad {}^1y_2 = \begin{bmatrix} y_2^T x_1 \\ y_2^T y_1 \\ y_2^T z_1 \end{bmatrix} \quad {}^1z_2 = \begin{bmatrix} z_2^T x_1 \\ z_2^T y_1 \\ z_2^T z_1 \end{bmatrix}$$

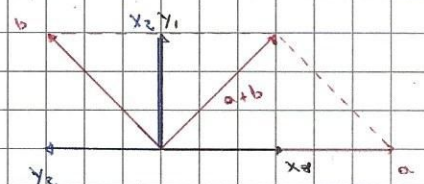
$$\Rightarrow {}^1b = ({}^1x_2 \ {}^1y_2 \ {}^1z_2) \cdot \begin{bmatrix} b_{x1} \\ b_{y1} \\ b_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2^T x_1 & y_2^T x_1 & z_2^T x_1 \\ x_2^T y_1 & y_2^T y_1 & z_2^T y_1 \\ x_2^T z_1 & y_2^T z_1 & z_2^T z_1 \end{bmatrix} \cdot {}^2b$$

DOVE LA MATRICE TROVATA È LA **MATRICE DI ROTAZIONE** 1R_2 . ESSA È COMPONETA DA SOLI VALORI $[-1, 1]$

DAL MOMENTO CHE TUTTI GLI ELEMENTI SONO VERSORI.

EX.

$${}^1a = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^2b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$${}^1R_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow {}^1a + {}^2b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^2R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow {}^2a + {}^1b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

DA QUESTO SI PUÒ GENERALIZZARE CHE

$${}^1R_2 = ({}^2R_1)^T \Rightarrow R^T R = I$$

INOLTRE RICORDANDO CHE

$$1) \det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$2) \det(A) = \det(A^T)$$

$$\text{se } (\det(R))^T = \det(I) = 1 \text{ ALLORA } \det(R) = \det(R^T) = 1.$$

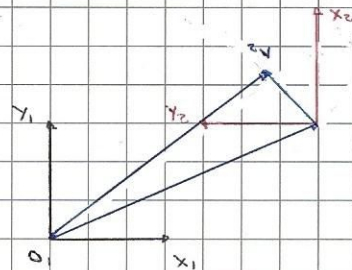
LE OPERAZIONI DI ROTOTRASLAZIONE SONO LA COMBINAZIONE APPUNTO DI UNA TRASLAZIONE E DI UNA ROTAZIONE

EX.

$${}^1V = {}^1O_2 + {}^1R_2 {}^2V$$

$${}^1O_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^2V = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$${}^1R_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1V = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ESISTE PER QUESTE OPERAZIONI UNA TECNICA PIÙ DIRETTA OVVERO LA FUNZIONE DI TRASFORMAZIONE OMOGENEA.

PER APPLICARLA È NECESSARIO AVERE I VETTORI OMOGENEI I QUALI HANNO UN ELEMENTO AGGIUNTIVO PARI A 1

COME ULTIMO ELEMENTO RISPETTO AL VETTORE ORIGINALE.

$${}^1V = {}^1O_2 + {}^1R_2 {}^2V$$

$${}^1\tilde{V} = \begin{bmatrix} {}^2V \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2\tilde{V} = \begin{bmatrix} {}^2V \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^1\tilde{V} = \begin{bmatrix} {}^1R_2 & {}^1O_2 \\ 000 & 1 \end{bmatrix} {}^2\tilde{V}$$

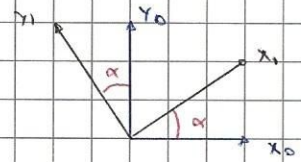
TRASFORMAZIONE OMOGENEA 1H_2

EX

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+7 \\ 1+3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} {}^1V$$

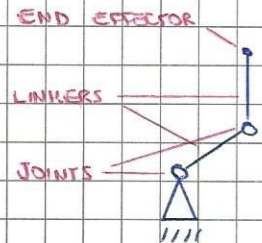
ESISTE ANCHE UN'ALTRA FORMA DELLA MATRICE DI ROTAZIONE LA QUALE HA COME RIFERIMENTO L'ANGOLO TRA L'ASSE DELLE ASCISSE DI UN SISTEMA DI RIFERIMENTO E QUELLO DELL'ALTRO SISTEMA.

$$R_e(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



DIRECT KINEMATICS OF A ROBOTIC MANIPULATOR

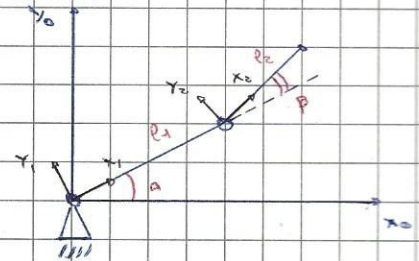
IN GENERE UN MANIPOLATORE ROBOTICO È UN BRACCIO ROBOTICO ED IN GENERE SI RAPPRESENTA COSÌ. ESSO È GENERALMENTE COMPOSTO DA LINKERS, I QUALI SONO CORPI RIGIDI, ^{E DA} JOINTS, I QUALI CONTENGONO MECCANISMI CHE PERMETTONO IL MOVIMENTO RELATIVO TRA I LINKER. ESISTONO DUE CATEGORIE DI JOINTS: PRISMATICI I QUALI



PERMETTONO UNA TRASLAZIONE, E REVOLUTI, I QUALI PERMETTONO UNA ROTAZIONE. ENTRAMBI CONFERISCONO 1

GRADO DI LIBERTÀ AL MANIPOLATORE. L'INSIEME DI LINKERS E DI JOINTS FORMANO UNA CATENA CINEMATICA CHE IN QUESTO CASO È APERTA, MENTRE, SE IL MANIPOLATORE AFFERRASSE UN OGGETTO, SI DIREBBE CONNESSA.

L'INTERESSE PRINCIPALE DELLA CINEMATICA DIRETTA È QUELLO DI STABILIRE A PRIORI LA POSIZIONE DELL'END EFFECTOR, DATA UNA SEQUENZA DI COMANDI ESPRESSI SOTTO FORMA DI ANGOLI (SI CONSIDERANO SOLO JOINTS REVOLUTI). PIÙ UTILE È LA CINEMATICA INVERSA PER CUI, A PARTIRE DALLA POSIZIONE CHE SI VUOLE RAGGIUNGERE,



SI DETERMINA LA SEQUENZA DI COMANDI NECESSARI MA È MOLTO PIÙ COMPLESSA E NON VERRÀ TRATTATA. IN GENERE, SECONDO TALE CONFIGURAZIONE, LA POSIZIONE DELL'END EFFECTOR PUÒ ESSERE ESPRESSA COME:

$${}^0E = {}^0O_z + {}^0R_z {}^zE$$

$$= {}^0O_z + {}^0R_1 {}^1R_z {}^zE$$

$$\text{DOVE } {}^0O_z = \begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha \\ l_1 \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^zE = \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^1R_z = \begin{bmatrix} c\beta & -s\beta & 0 \\ s\beta & c\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0R_1 = \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0R_z = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta - s\alpha s\beta & -c\alpha s\beta - s\alpha c\beta & 0 \\ s\alpha c\beta + c\alpha s\beta & -s\alpha s\beta + c\alpha c\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) & 0 \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0E_z = \begin{bmatrix} l_1 c\alpha \\ l_1 s\alpha \\ 0 \end{bmatrix} + {}^0R_z \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha + \cos(\alpha + \beta) l_2 \\ l_1 \sin \alpha + \sin(\alpha + \beta) l_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

IN QUESTO CASO SI POTEVA ARRIVARE AL RISULTATO ANCHE ATTRAVERSO LA TRIGONOMETRIA MA NEL CASO TRIDIMENSIONALE

MALE SI PUÒ PROCEDERE SOLO IN QUESTO MODO E SI FA USO DELLA CONVENZIONE DELLE TAVOLE DI DELAYIT-HARTEN.

BERG.

OLTRE ALLA POSIZIONE E ALL'ORIENTAMENTO DELL'END EFFECTOR, SPESSO SI CONTROLLA LA VELOCITÀ DEI JOINTS E QUINDI

LA VELOCITÀ DI QUESTO CHE PUÒ ESSERE ESPRESSA COME:

$$\text{DATO } {}^0E_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x(\alpha, \beta) \\ F_y(\alpha, \beta) \\ F_z(\alpha, \beta) \end{bmatrix}$$

$$V_E = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = J(\alpha, \beta) \cdot \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix}$$

(VELOCITÀ LINEARE)

DOVE $J(\alpha, \beta)$ È UNA JACOBIANA ANALITICA

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial F_y}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_y}{\partial \beta} \\ \frac{\partial F_z}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_z}{\partial \beta} \end{bmatrix}$$

$$\text{E DOVE } \dot{x}_2 = \frac{d}{dt} F_x(\alpha, \beta)$$

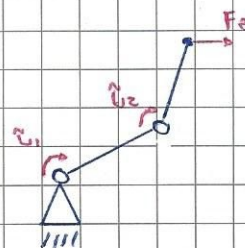
$$= \frac{\partial F_x}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial F_x}{\partial \beta} \frac{d\beta}{dt}$$

A PARTIRE DA CIÒ SI PUÒ STABILIRE LA FORZA ESERCITATA SULL'END

EFFECTOR, CONOSCENDO I MOMENTI TORCENTI IN CORRISPONDENZA

DEI JOINTS O LA LORO POTENZA.

$$\vec{N} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_z \end{bmatrix}$$



$$\vec{N}^T \dot{\theta} = F_e^T V_e$$

$$\vec{N}^T \dot{\theta} = F_e^T J \dot{\theta}$$

$$\vec{N} = J^T F_e$$

GRASPING

NELLO STUDIO DEL PROBLEMA DEL GRASPING NON SI MODELLERÀ E LAVORERÀ CON IL BRACCIO MA CON LA MANO DAL

MOMENTO CHE L'AZIONE DEL GRASP NON RICHIEDE SOLO DI GESTIRE CONTEMPORANEAMENTE LE DITA MA ANCHE DI

FARE COLLABORARE. INOLTRE, BRACCI ROBOTICI NON SONO DI INTERESSE DAL MOMENTO CHE NON È DIFFICILE REPE-

UN
RIRLI SUL MERCATO, A DIFFERENZA DELLE MANI. OGNI DITO PUÒ ESSERE PENSATO COME BRACCIO ROBOTICO E

L'OBIETTIVO È QUELLO DI MUOVERE OGGETTI CHE NON POSSONO FARLO DA SOLI. MOLTE AZIENDE DI LOGISTICA,

COME AMAZON, INVESTONO IN QUESTO PER POTER AUTOMATIZZARE ~~TANTO~~ L'INTERO PROCESSO PRIMA DEL TRASPORTO.

SE IL CONTROLLO È CENTRALIZZATO, IL CONTROLLATORE GESTISCE TUTTO MA SI PARLA DI COLLABORAZIONE SE SI HANNO

PIÙ CONTROLLORI INDIPENDENTI. L'AZIONE DI MANIPOLAZIONE È DIVISIBILE IN 3 PARTI:

1) AVVICINAMENTO ALL'OGGETTO

2) INSTAURAZIONE DEL CONTATTO E INTERAZIONE

3) MOVIMENTO DELL'OGGETTO

E MODELLI

CI SI CONCENTRERÀ PRINCIPALMENTE SULLE ULTIME DUE E SI STUDIERANNO TRAMITE METODI¹ ALGEBRICI E NON CI SI

BASERÀ SU ARCHITETTURE SPECIFICHE. INNAZITUTTO BISOGNA DISTINGUERE TRA I DUE TIPI DI GRASPING:

1) DI POTENZA: L'OBIETTIVO IN QUESTO CASO È IL MOVIMENTO STATICO DEGLI OGGETTI.

2) DI PRECISIONE: ^{PERMETTE} ~~QUANTO~~ UN MOVIMENTO RELATIVO TRA L'OGGETTO ED IL PALNO, EVITANDO IL MOVIMENTO DEL BRACCIO.

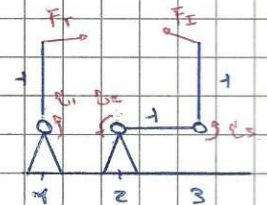
IL CONTROLLO È DATO DAI POLPASTRELLI DELLE DITA IN MODO CHE SE NE POSSANO SEGUIRE I GRADI DI LIBERTÀ.

L'INTERAZIONE CON UN OGGETTO È RESA ATTRAVERSO LE FORZE ESERCITATE DALLE SINGOLE DITA, INFATTI POSIZIONE E VELOCITÀ DEGLI OGGETTI SONO CONSEGUENZE DELLE FORZE, MA CIÒ DIFENDE ANCHE DAL MODELLO DEL CONTATTO. SI CON-

SIDERI UN SISTEMA COMPOSTO DA DUE DITA: POICHÉ LE DUE DEVONO COLLABORARE NON

SI POSSONO USARE DUE JACOBIANE DISTINTE MA BISOGNA RICONDURSI AD UN'UNICA, CIÒ

BISOGNA PENSARE IL TUTTO COME UN UNICO ROBOT CON DUE CATENE CINETICHE.



IN GENERALE DATA UNA FORZA $\vec{F}$ APPLICATA AD UN BRACCIO $\vec{d}$, IL PROCEDIMENTO PER IL CALCOLO DEL MOMENTO TORCENTE $\vec{\tau}$

AVRÀ ESSERE COMPRESO ATTRAVERSO LA SCREW MATRIX:

$$\vec{d} \times \vec{F} = S(d) \vec{F}$$

$$\text{DOVE } d = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \quad \text{E} \quad S(d) = \begin{bmatrix} 0 & -dz & dy \\ dz & 0 & -dx \\ -dy & dx & 0 \end{bmatrix}$$

MENTRE LA DIREZIONE DEL VETTORE $\vec{\tau}$ È DATA DALLA REGOLA DELLA MANO DESTRA. TALE MATRICE AVRÀ ESSERE UTILIZZATA

PER QUALSIASI PRODOTTO VETTORIALE. SIANO DATE LE FORZE DI CONTATTO E I MOMENTI TORCENTI NEI SINGOLI JOINTS.

SI VUOLE STABILIRE UNA RELAZIONE CHE LI LEGHI DIRETTAMENTE.

$$F_c = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$$

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}$$

INOLTRE DA CIÒ CHE SI È VISTO

$$V_r = J_r \dot{\theta}_r \quad \text{E} \quad V_I = J_I \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

DA CUI SI OTTIENE CHE

$$\begin{bmatrix} v_F \\ v_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_I & 0 \\ 0 & J_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

DOVE LA MATRICE È LA JACOBIANA DELLA MANO, 3x6, E LA TRASFORMAZIONE

È QUELLA USATA PER LE FORZE

LA POTENZA AL CONTATTO È DATA DALLA SOMMA DELLE POTENZE A JOINTS SINGOLI, INPATTI LA FORZA SULL'END EF-

FECTOR CORRISPONDE AI MOMENTI TORCENTI NEI JOINTS E LA VELOCITÀ LINEARE A QUELLE ANGOLARI:

$$\tilde{v}_1 \dot{\theta}_1 + \tilde{v}_2 \dot{\theta}_2 = F_{eI}^T v_I$$

$$(\tilde{v}_1 \tilde{v}_2) \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = F_{eI}^T J \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$(\tilde{v}_1 \tilde{v}_2) = F_{eI}^T J$$

$$\tilde{v}_I = J^T F_{eI}$$

QUINDI IN GENERALE $\tilde{v} = J^T F_e$ DOVE $\tilde{v}$ È LA POTENZA AL CONTATTO

NEL CASO PROPOSTO SI AVEREBBE CHE

$$\begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \tilde{v}_3 \end{bmatrix} = J^T \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s(d_1) & 0 \\ 0 & s(d_2) \\ 0 & s(d_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}$$

MA DAL MOMENTO CHE LE FORZE HANNO SEMPRE IL COMPONENTE Z NULLO NENTRE AL PIÙ ULTIM ELEMENTO DEL-

LE PRIME DUE RIGHE DI $s(d)$ SONO NON NULLI, ALLORA L'UNICO COMPONENTE NON NULLO DI $\tilde{v}$ È Z, COME

SUGGERISCE LA FISICA.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & -b \\ -a & b & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \cdot x + b \cdot y \end{bmatrix}$$

DONQUE IL RISULTATO PRECEDENTE PUÒ ESSERE COSÌ RIDOTTO

$$\begin{bmatrix} \tilde{v}_{1z} \\ \tilde{v}_{2z} \\ \tilde{v}_{3z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s(d_1)1r & 0 \\ 0 & s(d_2)1r \\ 0 & s(d_3)1r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \end{bmatrix}$$

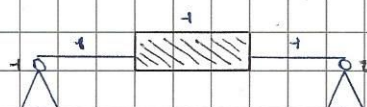
3×6

IN GENERALE LA JACOBIANA CAMBIA IN BASE ALLA CONFIGURAZIONE DEL MANIPOLATORE (POSIZIONE LINKS) E IN BASE AGLI

END EFFECTORS I QUALI A LORO VOLTA DIPENDONO DA COME VIENE AFFERRATO UN OGGETTO.

EX

$$d_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad s(d_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



$$d_z = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad S(d_z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

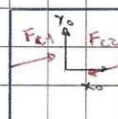
$$\Rightarrow J^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{1z} \\ \tau_{2z} \end{bmatrix} = J^T \begin{bmatrix} F_{c1} \\ F_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

IL PROBLEMA DI QUESTA CONFIGURAZIONE CONSISTE NELL'IMPOSSIBILITÀ DI **STRINGERE (SQUEEZE)** GLI OGGETTI. DA QUESTO ESEMPIO EMERGE IL CONCETTO DI **KERNEL** DI UNA MATRICE IN PARTICOLARE F È KERNEL DI J DAL MOMENTO CHE $J^T F = 0$, E CIÒ VALE PER ~~QUE~~ FORZE DIREZIONATE LUNGO I LINK (PUSH/PULL) E LUNGO z . IN ALTRE PAROLE I KERNEL SONO TUTTE LE FORZE CHE SONO RESISTITE NON ATTRAVERSO UN MOMENTO TORCENTE MA ATTRAVERSO I VINCOLI MECCANICI DEI JOINTS.

GRASP MATRIX

COME SI È VISTO NEL GRASPING ALLE FORZE APPLICATE ALL'OGGETTO SI CONTRAPPONGONO LE FORZE VINCOLARI ~~DELL~~ DI ESSO. SI STUDIA ORA IL PROBLEMA DAL PUNTO DI VISTA DELL'OGGETTO. LA **MATRICE DI GRASP** PERMETTE DI STABILIRE, A PARTIRE DALLE FORZE DI CONTATTO, L'EFFETTO COMPLESSIVO IN TERMINI DI MOVIMENTO. SI CONSIDERA DA ORA COME SISTEMA DI RIFERIMENTO O QUELLO FISSATO NEL BARICENTRO DELL'OGGETTO. LO SPOSTAMENTO IN TERMINI DI TRASLAZIONE E DI ROTAZIONE ~~POSSONO~~ ^{PUÒ} ESSERE STABILITO ATTRAVERSO



$$M \begin{bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{y}_0 \\ \ddot{z}_0 \end{bmatrix} = \sum \text{TUTTE LE FORZE APPLICATE ALL'OGGETTO}$$

$$I \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_x \\ \ddot{\theta}_y \\ \ddot{\theta}_z \end{bmatrix} = \sum \text{TUTTI I MOMENTI TORCENTI APPLICATI ALL'OGGETTO}$$

LE QUALI DEFINISCONO LA DINAMICA DELL'OGGETTO. SI CONSIDERI LA PRIMA EQUAZIONE. INNANZITUTTO ESISTONO 3 TIPI DI FORZE:

- 1) CONTATTO
- 2) GRAVITÀ
- 3) AMBIENTALI

SIZIONE DEI PUNTI DI CONTATTO E NON DAL MECCANISMO CHE ATTUA IL GRASP. SI CONSIDERI IL SEGUENTE ESEMPIO:

$${}^0F_{c1} = \begin{bmatrix} F_{c1x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^0F_{c2} = \begin{bmatrix} F_{c2x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



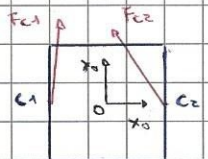
$$M \begin{bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{y}_0 \\ \ddot{z}_0 \end{bmatrix} = F_{NET} \quad \text{MA IN QUESTO CASO } F_{NET} = F_{c1} + F_{c2} = \underbrace{\begin{bmatrix} I & I \end{bmatrix}}_{G_F} \begin{bmatrix} F_{c1} \\ F_{c2} \end{bmatrix}$$

PER QUANTO RIGUARDA LA SECONDA EQUAZIONE, È POSSIBILE GENERARE UNA ROTAZIONE (PLANARE) SIA TRAMITE DUE O PIÙ FORZE, SIA TRAMITE L'APPLICAZIONE DI UN MOMENTO TORCENTE MA PER TRASMETTERE QUESTO È NECESSARIO CHE L'END EFFECTOR SIA UNA SUPERFICIE PIATTA, DUNQUE SI CONSIDERERANNO SOLO LE FORZE. SI CONSIDERI IL SEGUENTE

ESEMPIO:

$$\text{MOMENTO} \Big|_{F_{c2}} = \vec{C_2O} \times F_{c2} = d_2 \times F_{c2} = S(d_2) F_{c2}$$

ANALOGAMENTE PER F_{c1}



$$\Rightarrow \text{NET MOMENT} = \sum_i \text{MOMENTO} \Big|_{F_{ci}} = \begin{bmatrix} S(d_1) & S(d_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{c1} \\ F_{c2} \end{bmatrix}$$

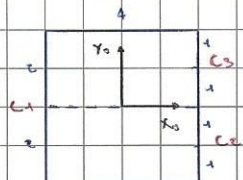
UNENDO I DUE RISULTATI SI OTTIENE CHE

$$\begin{bmatrix} F_{NET} \\ M_{NET} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I & I \\ S(d_1) & S(d_2) \end{bmatrix}}_{\text{GRASP MATRIX}} \begin{bmatrix} F_{c1} \\ F_{c2} \end{bmatrix}$$

DOVE LA MATRICE DI GRASP CONTIENE TANTE COLONNE $\begin{bmatrix} I \\ S(d_i) \end{bmatrix}$ QUANTI SONO I PUNTI DI CONTATTO DIVERSI i .

EX.

$$d_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad d_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad d_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\Rightarrow G = \begin{bmatrix} I & I & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

IN GENERALE LA DINAMICA DELL'OGGETTO È DESCRITTA COME

$$\begin{bmatrix} F_{NET} \\ M_{NET} \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} F_{c1} \\ F_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_0 & \ddot{y}_0 & \ddot{z}_0 & \ddot{\theta}_x & \ddot{\theta}_y & \ddot{\theta}_z \end{bmatrix}^T$$

$$\text{DOVE } M = \begin{bmatrix} M_x & 0 & 0 \\ 0 & M_y & 0 \\ 0 & 0 & M_z \end{bmatrix} \quad \text{E} \quad I = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$$

SI VOGLIANO TROVARE ORA I KERNEL DI G NEL CASO DI APPLICAZIONE DI DUE FORZE SU UN OGGETTO QUADRATO DI LATO 4.

$$\begin{bmatrix} F_{net} \\ M_{net} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{c1x} \\ F_{c1y} \\ 0 \\ F_{c2x} \\ F_{c2y} \\ 0 \end{bmatrix}$$

LE RIGHE E LE COLONNE ELIMINATE CONTENGONO SOLI 0

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{c1x} \\ F_{c1y} \\ F_{c2x} \\ F_{c2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{nx} \\ F_{ny} \\ M_{nz} \end{bmatrix}$$

CHE CORRISPONDONO ALLE RIGHE RIMANENTI DELLA MATRICE

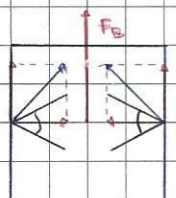
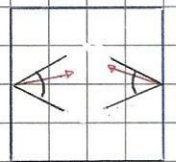
$$\begin{cases} F_{c1x} + F_{c2x} = 0 \\ F_{c1y} + F_{c2y} = 0 \\ -2F_{c1y} + 2F_{c2y} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{c1x} = -F_{c2x} \\ F_{c1y} = F_{c2y} = 0 \end{cases}$$

I KERNEL HANNO FORMA

$$\begin{bmatrix} F_{c1x} \\ 0 \\ 0 \\ -F_{c1x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

IN QUESTO CASO NON C'È ALCUN MOVIMENTO DELL'OGGETTO MA CIÒ È PROPEDEUTICO AL GRASP, CIÒ È LE FORZE APPLICATE DEVONO AVERE MODULO E DIREZIONE TALI CHE L'OGGETTO NON SCIVOLI E CHE CI SIA SUFFICIENTE **ATTRITO SCATICO** DA MANTENERE LA PRESA, ANCHE IN CASO DI FORZE ESTERNE. IN TERMINI VETTORIALI SI DEVE FAR IN MODO CHE LE RISULTANTI DELLE FORZE AI PUNTI DI CONTATTO RIENTRINO SEMPRE NEL **CONO** D'ATTRITO. SE UNA FORZA ESTERNA TENTA DI PORTARE VIA L'OGGETTO E SE LE FORZE DELLA PRESA NON AUMENTANO, LA PRESA VIENE PERSA. IN GENERALE PER RISOLVERE QUESTO PROBLEMA È NECESSARIO CONOSCERE LA DIREZIONE NORMALE NEI PUNTI DI CONTATTO ED IL COEFFICIENTE DI ATTRITO. LA FORZA ESTERNA CHE SI TRATTERÀ PRINCIPALMENTE È QUELLA DI GRAVITÀ E CON



W_{ext} SI INDICA IL VETTORE $\begin{bmatrix} F_{ext} \\ M_{ext} \end{bmatrix}$. IL PROBLEMA PUÒ ESSERE FORMULATO COME

$$G \begin{bmatrix} F_{c1} \\ F_{c2} \end{bmatrix} = -W_{ext}$$

$$-W_{ext} = [0 \ -mg \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

DOVE LE FORZE AL CONTATTO SONO LE INCOGNITE, DUNQUE

$$F_c = G^\# (-W_{ext}) + N(G) \vec{e}$$

DOVE # INDICA **PSEUDOINVERSA**

IN QUESTO CASO $F_c = \begin{bmatrix} 0 & mg/2 & 0 & | & 0 & mg/2 & 0 \end{bmatrix}^T$ MA LE FORZE NON POSSONO ESSERE DIRETTE PARALLELANENTE

A QUELLA DI GRAVITA' PERCHÉ NON SI AVREBBE ATTRITO CON L'OGGETTO E SCIVOLEREBBE, DUNQUE A QUESTE VAN-

NO SONNATE ~~FORZE~~ FORZE DIRETTE VERSO L'INTERNO IN MODO CHE $F_c = F_p + F_{ci}$ RIENTRI NEL CONO D'ATTRITO, PER QUESTO $F_{ci} \in N(G)$, $G F_{ci} = 0$. PER OTTENERE QUESTO, È NECESSARIO ~~NON~~ APPLICARE IL GIUSTO MOMENTO TORCENTE. CON LE DUE EQUAZIONI

1) $-W = GF$ CHE INVERTITA PERMETTE DI STABILIRE LA FORZA AL CONTATTO DA APPLICARE PER IL GRASP.

2) $\tau = J^T F$ CHE PERMETTE DI STABILIRE IL MOMENTO TORCENTE NECESSARIO PER APPLICARE F .

NEL GRASPING, PERÒ, È IMPORTANTE AVERE MISURE IN FEEDBACK DELLE FORZE APPLICATE, CONOSCENDO IL MOMENTO TORCENTE APPICATO. PER AVERE QUESTE INFORMAZIONI, DATO IL SISTEMA

$$\begin{bmatrix} -W \\ \tau \end{bmatrix}_{(m+5) \times 1} = \begin{bmatrix} G \\ J^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{c1} \\ F_{c2} \end{bmatrix}_{3mc \times 1}$$

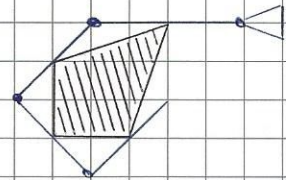
DOVE $m = \# \text{ JOINTS}$ E $mc = \# \text{ CONTACT POINTS}$

È NECESSARIO CHE CI SIANO PIÙ EQUAZIONI CHE VARIABILI, CIÒE $m+5 \geq 3mc$. NEL CASO RAFFIGURATO DI

ENVELOPING GRASPING È IMPOSSIBILE VALUTARE LE FORZE, INFATTI SI HANNO 10 EQUAZIONI

E 12 VARIABILI, MA NON È RILEVANTE CHE ESSE SIANO NEL CONO D'ATTRITO DAL MOMENTO

CHE L'OGGETTO È BLOCCATO DALLA PRESA.



SE IL SISTEMA NON HA UN NULLSPACE, ALLORA ESSO HA UNA SOLA SOLUZIONE E LE FORZE DEVONO TROVARSI NECESSARIAMENTE NEL CONO D'ATTRITO PER FARE PRESA MA, SE NON LO FOSSERO, NON SI POTREBBE INTERVENIRE ARTIFICIALMENTE. DUNQUE È NECESSARIO CHE CI SIANO INFINITE SOLUZIONI, CIÒE $N(G) \neq \emptyset$. SE G È A RANGO MAS-SIMO SI HA UN GRASP CHE PUÒ MUOVERE L'OGGETTO IN OGNI DIREZIONE.

HAPTICS

LA TECNOLOGIA APTICA È L'ULTIMA FRONTIERA DELLA ROBOTICA DEL GRASPING E CONCERNE LA RESTITUZIONE ALL'UTENTE O L'ADATTAMENTO DELLA PRESA IN FUNZIONE DELLE FORZE PERCEPITE. IN ALTRE PAROLE "HAPTIC" SIGNIFICA INTERAZIONE TATTILE. I COMPONENTI NECESSARI PER TALE INTERAZIONE SONO:

1) MISURA DEL MOVIMENTO DI UNA CERTA PARTE DEL CORPO TRAMITE UNA TECNOLOGIA APPROPRIATA.

2) RILEVAMENTO DELLE COLLISIONI TRAMITE UN'ELABORAZIONE DELLA MISURA, RISPETTO AD UNA RAPPRESENTAZIONE DELL'OGGETTO.

3) RENDERING APTICO TRAMITE UN ATTUATORE PER PERMETTERE L'ACKNOWLEDGEMENT ALL'EFFETTIVITÀ DELL'AZIONE SVOLTA, RESTITUENDO UNA SENSAZIONE REALE O SIMULATA O UN DISPLAY APTICO.

IN TERMINI MATEMATICI CIÒ SI TRADUCE COME

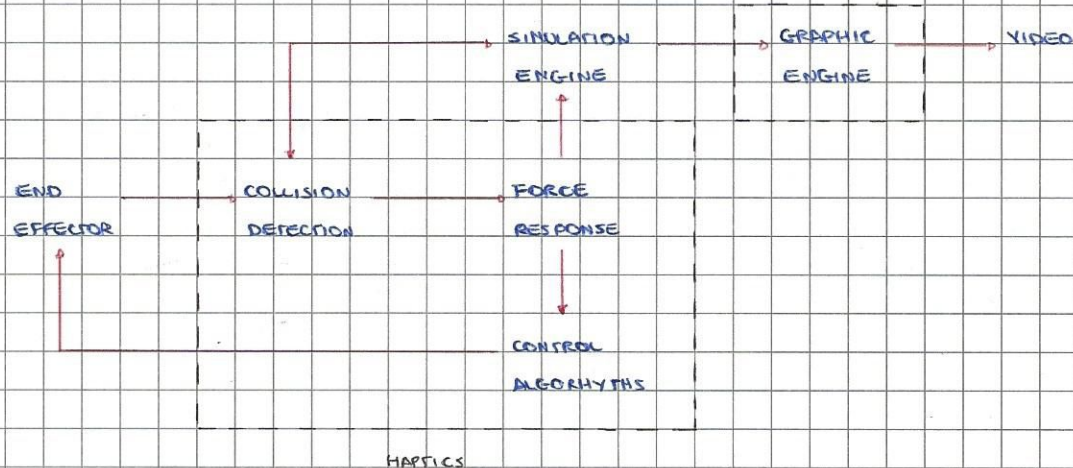
INPUT $\rightarrow K \Delta X \rightarrow F \rightarrow \dot{U} \rightarrow$ OUTPUT DONE ΔX È RELATIVO AD UNA SUPERFICIE

IN GENERALE LA QUANTITÀ DI ENERGIA SCAMBIATA NELL'INTERAZIONE ARTICA È MOLTO PIÙ ALTA RISPETTO AGLI ALTRI

TIPICI DI INTERAZIONE MANIPOLARE PER QUESTO NON È UN SISTEMA EFFICIENTE PER COMUNICARE. IL TOCCO È ESSENZIALMENTE UNO

SCAMBIO DI FORZE E PER QUESTO LA ROBOTICA È IL CAMPO GIUSTO DA CUI SVILUPPARE INTERFACCIE ARTICHE. IL PROCESSO

PUÒ ESSERE COSÌ SCHEMATIZZATO



IL SIMULATION ENGINE È QUELLO CHE SVOLGE I CALCOLI AL FINE DI RILEVARE LA COLLISIONE, E DUNQUE DI RESCUIRE IL FEEDBACK, OIA DI MOSTRARE A SCHERMO L'AMBIENTE VIRTUALE.

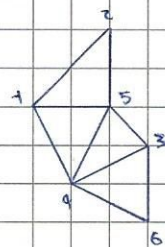
COLLISION DETECTION

UN OGGETTO VIRTUALE È RAPPRESENTATO DA UNA NUVOLA DI PUNTI COLLEGATI DA FORME CHE NE DEFINISCONO E RAPPRESENTANO APPROSSIMATIVAMENTE LA SUPERFICIE E CHE SONO TRIANGOLI. SI È SCELTA TALE FORMA IN QUANTO NON È

DETTO CHE SIA SEMPRE POSSIBILE DEFINIRE FIGURE PIÙ COMPLESSE ED IN QUANTO RAPPRESENTANO BENE LE DEFORMAZIONI DELLE SUPERFICIE. OGNI TRIANGOLO È IDENTIFICATO DAI PROPRI VERTICI

EX.

T ₁	1	2	5
T ₂	2	4	5
T ₃	3	4	5
T ₄	3	4	6



IL RILEVAMENTO DELLA COLLISIONE CONSISTE NEL DETERMINARE SE SI RIENTRA NELLA BOUNDING BOX CHE CONTIENE PARTE DELLA SUPERFICIE DELL'OGGETTO. LA BOX PIÙ PICCOLA È QUELLA CHE CONTIENE UN TRIANGOLO.

DA ORA IN POI CON X_h SI IDENTIFICA IL VETTORE AVATAR A 3 DIMENSIONI. SE X_h È FUORI LA BOUNDING BOX, SI È SICURI CHE LA SUPERFICIE NON VIENE TOCCATA, DUNQUE NON SI NECESSITA DI RISPONDERE CON ALCUNA FORZA. SE X_h È DENTRO, È NE-

CESSARIO ~~VERIFICARE~~ UN BOUNDING PIÙ STRINGENTE E SI DEVE CALCOLARE IN QUANTE BOX

SI TROVA X_h . CIO' SI RIPETE FINO A CHE NON SI RICADE NEL CASO PRECEDENTE O

FINO A QUANDO NON SI ARRIVA ALE BOX MINIME LA VERIFICA DEL TOCCO SI SVOLGE

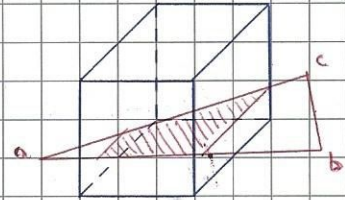
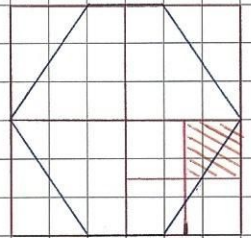
LAVORANDO SUL TRIANGOLO COME PIANO, DESCRITTO DALL'EQUAZIONE

$$(a \ b \ c) X_p = d$$

DONE X_p È UN PUNTO QUALSIASI DEL PIANO E

DONE $(a \ b \ c)$ SONO COEFFICIENTI LEGATI AI

VERTICI DEL TRIANGOLO



UN TRIANGOLO È DUNQUE DESCRITTO DAL SISTEMA

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ d \\ d \end{bmatrix}$$

CHE PUÒ ESSERE NORMALIZZATO, DIVIDENDO PER d , IN MODO CHE

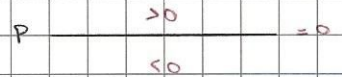
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

IN GENERALE SE X_h È NELL'EQUAZIONE DEL PIANO, $(a \ b \ c) X_h - d$, SI OTTIENE

1) > 0 SE È SOPRA IL PIANO, CIOÈ NON C'È CONTATTO.

2) $= 0$ SE TOCCA IL PIANO MA HA PROBABILITÀ NULLA COME EVENTO.

3) < 0 SE TOCCA L'OGGETTO, CIOÈ SE DEFORMA LA SUPERFICIE.



DUNQUE L'ALGORITMO DI COLLISION DETECTION CONSISTE IN:

1) COSTRUIRE LE BOUNDING BOX: NEL CASO PLANARE UN TRIANGOLO È UN SEGMENTO E IL PIANO UNA RETTA E SI HA UNA NU-

VOLO DI PUNTI (E MAGUE TRIANGOLARI) INDIVIDUATI DA COORDINATE SECONDO UN QUALCUN

SISTEMA DI RIFERIMENTO. PER COSTRUIRE LA BOX INIZIALE SI CONSIDERANO I VALORI MINIMI

E MASSIMI DELLE COORDINATE LUNGO TUTTI I COMPONENTI SU TUTTA LA NUVOLE.

2) INDIVIDUARE $X_h(t)$ LA POSIZIONE DELL'AVATAR.

3) ESPRIMERE IL PIANO SECONDO L'EQUAZIONE VISTA, CALCOLANDO $(a \ b \ c)$ DAI VERTICI DEL TRIANGOLO.

4) PERFORMARE LA COLLISION DETECTION PONENDO $X_p = X_h$ NELL'EQUAZIONE DEL PIANO E STUDIARE IL SEGNO DEL RISULTATO.

SE LE COORDINATE DI X_h RIENTRANO NEL RANGE DELLA BOX ALLORA PUÒ ESSERE CONTATTO E SI VERIFICA IN QUESTO

MODO, ALTRIMENTI NON PUÒ E NON È NECESSARIO ALCUN CALCOLO AGGIUNTIVO.

5) SUDDIVIDERE LA BOUNDING BOX: SI SUDDIVIDE LA BOUNDING BOX IN 2 PER OGNI DIMENSIONE SE SI È POTENZIALMENTE IN CON-

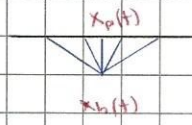
TATTO E SI RIPETE FINO AD AVERE UN SOLO TRIANGOLO (O SEGMENTO). SI RICALCOLA TUTTO

TO A PARTIRE DAL PASSO 2.

IN TEORIA QUANDO L'ALGORITMO VIENE ESEGUITO L'OGGETTO INTERO HA, CONOSCENTO LA POSIZIONE INIZIALE E LA VELOCITÀ DI MOVIMENTO DEL DITO, SI PUÒ RESTRINGERE L'AREA, CIOÈ IL NUMERO DI TRIANGOLI, SU CUI SVOLGERE I CALCOLI.

RENDERING APTICO

SE x_h SI TROVA ALL'INTERNO DELLA SUPERFICIE SI PUÒ RISPONDERE CON UNA FORZA NORMALE ALLA SUPERFICIE. È NECESSARIO INNANZITUTTO TROVARE x_p IL PUNTO A DISTANZA MINORE A x_h SULLA SUPERFICIE IN QUANTO



$$F = k(x_h - x_p)$$

TROVARE x_p È UN PROBLEMA DI MINIMIZZAZIONE SULLA DISTANZA, DUNQUE

$$d = \sqrt{(x_p - x_h)^T (x_p - x_h)}$$

$$\Rightarrow \min_{x_p} \frac{d^2}{2} = \min_{x_p} d$$

$$\text{MA } x_p \in P, \text{ CIOÈ } (a \ b \ c) x_p = d$$

$$\min_{x_p, \lambda} \frac{1}{2} (x_p - x_h)^T (x_p - x_h) + \lambda [(a \ b \ c) x_p - d]$$

SECONDO IL METODO DI LAGRANGE

$$= \min_{x_p, \lambda} Q(x_p, \lambda)$$

DOVE λ È UNO SCALARE

L'OTTIMO SI TROVA RISOLVENDO

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x_p} = (x_p - x_h) - \lambda (a \ b \ c)^T = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial \lambda} = (a \ b \ c) x_p - d = 0 \end{cases}$$

$$x_p - (a \ b \ c)^T \lambda = x_h$$

$\Rightarrow$

$$(a \ b \ c) x_p + 0 \lambda = d$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a \ b \ c \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_h \\ d \end{bmatrix}$$

PER QUANTO RIGUARDA k , ESSO DEVE ESSERE ALTO IN MODO CHE LA FORZA SIA SUFFICIENTE A NON PERMETTERE DEFORMAZIONI ECCESSIVE. BISOGNA PERÒ DISTINGUERE TRA IL k DEL MATERIALE REALE E QUELLO ASSUNTO NELLA SIMULAZIONE IL QUALE SARÀ SEMPRE MINORE PER LE LIMITAZIONI NELLA RAPPRESENTAZIONE. k DEVE ESSERE SUFFICIENTEMENTE ALTO DA EVITARE L'INCROCIO QUANDO SI HANNO PIÙ PUNTI DI CONTATTO. SI HA UN ULTERIORE k DIVERSO SE LA SUPERFICIE È DEFORMABILE E VIENE DEFORMATA.

SI CONSIDERI UN OGGETTO CURVO, COME UNA SFERA. IN GENERALE LA DIFFERENZA TEMPORALE TRA UN'AZIONE ED IL

FEEDBACK SENSORIALE NON PUO' SUPERARE LA FRAZIONE DI SECONDO IN QUANTO SI AVREBBE

LA DISSOCIAZIONE DEI DUE EVENTI. LA COMPUTAZIONE PERO' POTREBBE IMPIEGARE MOLTO TEMPO

DUNQUE SI DEVE CERCARE DI USARE MENO DATI POSSIBILI. SI IPOTIZZI, PER ESEMPIO, DI

VOLER APPROSSIMARE LA SFERA CON UN CUBO: LE FORZE NON POSSONO ESSERE DIRETTE ~~PERMANENTI~~

MA SECONDO LE NORMALI A QUESTO IN QUANTO RISULTEREBBE IRRREALISTICO. SI, POTREBBE AUMENTARE IL NUMERO DI

VERTICI, MIGLIORANDO L'APPROSSIMAZIONE, O ~~MASSIMA~~ SI POTREBBE UTILIZZARE L'INTERPOLAZIONE: SI CONSIDERA UN

PUNTO SULLA SUPERFICIE REALE E SI CALCOLANO I PIANI, CONSIDERANDO I PUNTI ADIACENTI. PER OGNUNO DI ESSI SI

DETERMINA LA NORMALE DERIVANDO SECONDO X, Y E Z LA FUNZIONE DEL PIANO OPPURE

$$(a \ b \ c) / (a^2 + b^2 + c^2)$$

E, FACENDO LA MEDIA DI QUESTE, SI OTTIENE LA NORMALE AL PUNTO INIZIALE. CIO' E'

EQUIVALENTE A RISOLVERE IL SISTEMA

$$\begin{bmatrix} x_{p1}^T \\ x_{p2}^T \\ \vdots \\ x_{ps}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

5x3 3x1 5x1

DOVE $(a \ b \ c)^T$ E' L'INCIGNICA E CONCISCE NELLA NORMALE AL PIANO

DEFINITO DA TUTTI I PUNTI

TENENDO ANCORA CONTO DELLA COSTRUZIONE FATTA, SE SI PENETRA NELLA SUPERFICIE,

BISOGNA STABILIRE LA NORMALE DELLA FORZA DA APPLICARE. SI CONSIDERI INIZIALMENTE

IL CASO BIDIMENSIONALE RAPPRESENTATO: L'INTERPOLAZIONE PERMETTE DI STABILIRE CHE

$$N = \frac{d_2}{d_1 + d_2} N_1 + \frac{d_1}{d_1 + d_2} N_2$$

$$\text{DOVE } d_1 = \overline{x_p p_1} \\ d_2 = \overline{x_p p_2}$$

IN PARTICOLARE

1) SE $d_1 = 0$, $N = N_1$

2) SE $d_2 = 0$, $N = N_2$

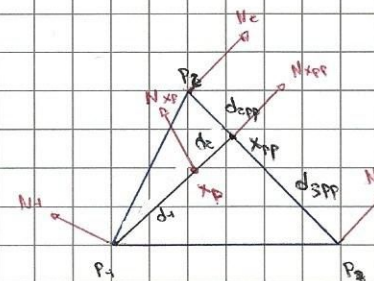
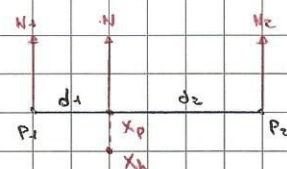
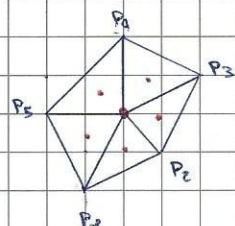
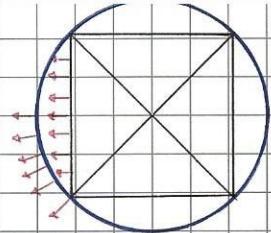
PER IL CASO TRIDIMENSIONALE NON SI FA ALTRO CHE APPLICARE QUESTO DUE VOLTE. 5

INNANZITUTTO VA SCELTO UN VERTICE E VA PROIETTATO SUL LATO OPPOSTO PASSANDO

PER x_p , IL QUALE E' CONOSCIUTO DALLA COLLISION DETECTION. SI CALCOLA POI LA

NORMALE IN x_{pp} TRAMITE L'INTERPOLAZIONE SUL LATO IN CUI SI TROVA

$$N_{xpp} = \frac{d_{3pp}}{d_{3pp} + d_{2pp}} N_2 + \frac{d_{2pp}}{d_{3pp} + d_{2pp}} N_3$$



INFINE SI INTERESSA SULLA PROIEZIONE PER CALCOLARE LA NORMALE A X_p .

$$N_{xp} = \frac{d_z}{d_1 + d_z} N_1 + \frac{d_1}{d_1 + d_z} N_{xpp}$$

SI CONSIDERI ORA UN OGGETTO FINO: SE X_h È TROPPO IN PROFONDITÀ, L'ALGORITMO DI COLLISION

DETECTION RICONOSCIEREBBE CHE PIÙ VICINA LA SUPERFICIE INFERIORE E SI ANDREBBE UNA FORZA

DIRETTA NEL SENSO OPPOSTO. PER CIÒ VA TENUTA MEMORIA DELLO STATO PASSATO. PER RISOLVERE

IL PROBLEMA, INVECE DI PRENDERE x_p SULLA SUPERFICIE, SI CONSIDERA COME CENTRO DI UNA

SFERA DI RAGGIO TRASCURABILE. SI TRACIA IL SEGMENTO $X_h(k+1)X_p(k)$ E IL PIANO

INTERSECATO È QUELLO SU CUI UNICAMENTE VA SVOLTO L'ALGORITMO DI COLLISION DETECTION.

QUESTA TECNICA È DETTA **ALGORITMO DI PROSSIMITÀ VIRTUALE**.

FORCE FEEDBACK

FINORA SI È TRASCURATO L'ATTRITO IN QUANTO LA FORZA APPLICATA SI ASSUNGEVA PERPENDICOLARE ALLA SUPERFICIE

DUNQUE LA FORZA TANGENTE È NULLA. TENENDO CONTO DELL'ATTRITO, DATA UNA FORZA NON DIRETTA

LUNGO LA NORMALE, LA FORZA REATTIVA, LA QUALE È ESATTAMENTE UGUALE E OPPOSTA,

DEVE RICADERE NEL CONO D'ATTRITO. ESSA DUNQUE È ESPRIMIBILE COME LA SOMMA DEI

COMPONENTI NORMALE E TANGENTE ALLA SUPERFICIE:

$$F_N = N^T F N = N N^T F$$

DOVE $N^T F$ È IL MODULO DELLA COMPONENTE NORMALE E N IL VETTORE NORMALE

$$DA F = F_N + F_T$$

$$F_T = F - F_N = F - N N^T F$$

$$= (I - N N^T) F$$

SECONDO L'ALGORITMO DI RENDERING:

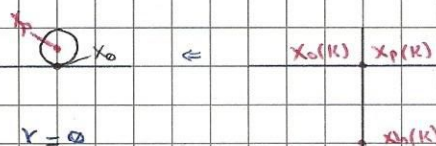
$$F = k_h [x_p(k) - x_h(k)] \text{ È LA FORZA REATTIVA ESERCITATA DAGLI ATTUATORI SUNE DICA.}$$

$$-F = k_h [x_h(k) - x_p(h)] \text{ È LA FORZA ESERCITATA PER MUOVERE L'OGGETTO VIRTUALE.}$$

UN'ESEMPIO SONO $JF = \ddot{x}$ E $F = M\ddot{x}$.

SI CONSIDERI UN OGGETTO RIGIDO E SI RAPPRESENTI IL PONTO DI

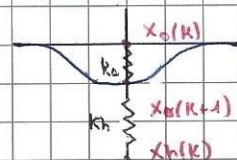
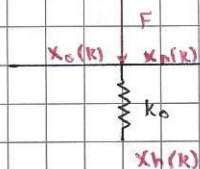
CONTATTO COME UNA SFERA DI RAGGIO NULLO, CIOÈ $x_0(k) = x_p(k)$,



ALLORA $x_0(k+1) = x_0(k)$ E NON DIPENDE DA x_h IN QUANTO LA SUPERFICIE E' NON DEFORMABILE E L'OGGETTO

E' STATICO. SI CONSIDERI ORA UN OGGETTO DEFORMABILE:

$$x_0(k+1) = F(x_h(k))$$



IL MODELLO PIU' SEMPLICE PER GLI OGGETTI DEFORMABILI E' LA MOLLA

PER LA QUALE $\Delta x = F/k_0$ DOVE k_0 NELLA SIMULAZIONE PUO' ESSERE FISSATO SCELGENDO QUELLO REALE DALLA DEFORMAZIONE MA E' DIVERSO DA QUELLO DELL'INTERFACCIA APTICA.

$$\begin{aligned} x_0(k+1) &= x_0(k) + \Delta x = x_0(k) + \frac{F}{k_0} \\ &= x_0(k) + \frac{k_h(x_h(k) - x_0(k))}{k_0} \end{aligned}$$

DUNQUE LA FORZA NECESSARIA PER OTTENERE TALE DEFORMAZIONE E'

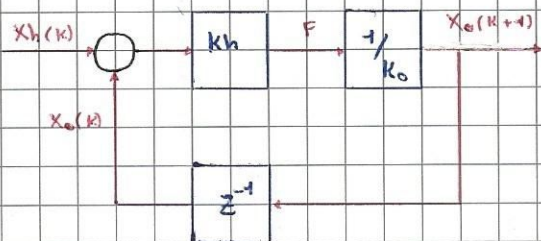
$$\begin{aligned} F &= k_h |x_h(k) - x_0(k)| \\ &= k_0 |x_0(k) - x_0(k+1)| \end{aligned}$$

DOVE PER CORPI RIGIDI, $k_h \neq 0$ E $k_0 = 0$

PER CORPI MORBIDI, $k_h \neq 0$, $k_0 \neq 0$ E $k_h = k_0 \Rightarrow$ STESSO SPOSTAMENTO Δx PER ENTRAMBE.

SI CONSIDERI L'IMPLEMENTAZIONE DI QUESTI RISULTATI PER CREARE UN SIMULATORE: E' NECESSARIO COSTRUIRE UN SISTEMA A CONTROREAZIONE CHE SIA ASINTOTICAMENTE STABILE.

$$\begin{aligned} Z[x_0(k+1)] &= \frac{k_h/k_0}{1 + \frac{k_h}{k_0} z} Z[x_h(k)] \\ &= \frac{k_h z}{k_0 z + k_h} Z[x_h(k)] \end{aligned}$$



SI HA UN POLO IN $-\frac{k_h}{k_0}$ CHE DEVE ESSERE STABILE, DUNQUE

$$\left| \frac{k_h}{k_0} \right| < 1 \Rightarrow k_h < k_0$$

PER STABILITA' SI INTENDE CHE AL TOCCO DI UN OGGETTO VIRTUALE, LA PARTE DI SUPERFICIE CONTATTA SI STABILIZZA AD

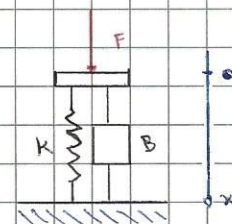
UN CERTO VALORE. IN REALTA' IL SISTEMA NON HA DINAMICA MA LA ASSUME IN SIMULAZIONE DAL MOMENTO CHE I

CALCOLATORI CAMPIONANO E AGGIORNANO IL SISTEMA AD SECONDO DIVERSI VALORI DELLA FORZA.

OGGETTI DINAMICI

LA DINAMICA IN GENERALE DEGLI OGGETTI È DESCRIVIBILE ATTRAVERSO ODE E IL PROBLEMA PIÙ GRANDE IN SIMULAZIONE È TROVARE RISOLUTORI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI AL FINE DI AVERE IL REAL-TIME. SI FA DUNQUE USO DI SEMPLIFICAZIONI. UN ESEMPIO DI OGGETTO DINAMICO È

$$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = F$$



LA QUALE È UN ODE DI 2° ORDINE DIPENDENTE DAL TEMPO. SI APPROSSIMA QUESTA AD UN

SISTEMA DI DUE EQUAZIONI ~~non differenziali~~ DIFFERENZIALI DI 1° ORDINE

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

LA DIMENSIONE DEL VETTORE È PARI ALL'ORDINE DELL'EQUAZIONE

$$\Rightarrow \dot{x}_1 = x_2$$

$$\Rightarrow M\dot{x}_2 + Bx_2 + Kx_1 = F$$

$$\dot{x}_2 = \frac{(-Kx_1 - Bx_2 + F)}{M}$$

DUNQUE RICONDUCENDO IL TUTTO ALLA FORMA $\dot{x} = Ax + Bu$, DOVE $F=u$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K/M & -B/M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} F$$

SI CONSIDERI ORA LO SPOSTAMENTO DI UN OGGETTO IN UNO SPAZIO 3D (ESEMPIO CASO MULTI-VARIABLE)

$$M\ddot{x} = F \quad \text{DOVE } \dot{x} = [x \ y \ z]^T$$

SI DEFINISCE LO STATO $\lambda = (x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z})^T = (\lambda_1 \dots \lambda_6)^T$ PER PASSARE A 6 EQ. DIFFERENZIALI DI GRADO 1.

$$\dot{\lambda}_1 = \lambda_4 \quad \lambda_4 = F_x / m_x$$

$$\dot{\lambda}_2 = \lambda_5 \quad \lambda_5 = F_y / m_y$$

$$\dot{\lambda}_3 = \lambda_6 \quad \lambda_6 = F_z / m_z$$

DOVE LE COMPONENTI m DELLA MASSA SONO UGUALI MA QUELLE DELL'INERZIA SONO DIVERSE

$$\Rightarrow \dot{\lambda} = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 \\ 0_3 & 0_3 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 0_3 \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$$

IN GENERALE $\dot{x}(t) = f(x(t); u(t))$ MA I CALCOLATORI LAVORANO NEL DISCRETO PER CUI $\dot{x}(t)$ NON ESISTE PROPRAMENTE E

$$x(t) \Rightarrow x(t_0 + kh) \Rightarrow f(x(t_0 + kh); u(t_0 + kh)) \quad \text{DOVE } h \text{ È UN INTERVALLO E } k \in \mathbb{N}$$

PER DETERMINARE $\dot{x}$ SI UTILIZZA IL METODO DI EULERO IL QUALE CONSISTE NELL'APPROSSIMARE f ALLA SUA ESPANSIO-

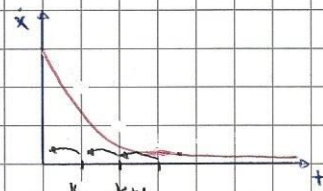
NE DI TAYLOR AL PRIMO ORDINE

$$x(t_0+h) = x_0 + \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_0} \cdot h = x_0 + f(x(t_0), u(t_0)) \cdot h$$

N.B.: SE SI CONOSCESSERO TUTTE LE DERIVATE DI F IN UN PUNTO SI POTREBBE PREVEDERLA IN UN FUTURO QUALSIASI.

TALE APPROSSIMAZIONE HA PERÒ FORTE LIMITAZIONI. SI PRENDA PER ESEMPIO UNA MOLLA

$$\begin{cases} \dot{x} = -kx \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad t_0 = 0 \quad \text{CON SOLUZIONE } e^{-kx} x_0$$



SECONDO L'APPROSSIMAZIONE DI EULER

$$x(t_0+h) = x/(k+1)h = x(kh) + f(x(kh), u(kh))h$$

$$\begin{aligned} x(k+1) &= x(k) + (-k_e x(k))h \\ &= \underbrace{(1 - k_e h)}_A x(k) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{eig}(A) = (1 - k_e h) \quad \text{POICHÉ SI È NEL CASO MONODIMENSIONALE}$$

PER LA STABILITÀ SI IMPONE CHE $|1 - k_e h| < 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - k_e h < 1 \\ 1 - k_e h > -1 \end{cases} \quad \begin{cases} h > 0 \\ h < \frac{2}{k_e} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 0 < h < \frac{2}{k_e}, \quad k_e \in \mathbb{R}^+$$

DUNQUE PIÙ k_e È ALTO, PIÙ h DIVENTA PICCOLO E PEGGIORE È IL REAL-TIME. IL FATTO CHE SI HA UN PROBLEMA NUMERICO FA CAPIRE CHE L'APPROSSIMAZIONE È TROPPO GROSSOLANA. SI UTILIZZA DUNQUE IL METODO DEL MID-POINT IL QUALE CONSIDERA ANCHE IL SECONDO TERMINE DERIVATO DELL'ESPANSIONE. SI SUPPONGA DI AVERE UN SISTEMA AD ENERGIENZA LIBERA:

$$x(t_0+h) = x_0 + \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_0} \cdot h + \frac{\left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{t_0}}{2} h^2$$

LA DERIVATA SECONDA È STABILITA SEMPRE TRAMITE L'ESPANSIONE DI TAYLOR SVOLTA SU F

$$F(x_0 + \Delta x) = F(x_0) + \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x_0} \cdot \Delta x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dF(x(t))}{dt} = \frac{dF(x(t))}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x_0} \cdot F(x_0)$$

DOVE $\frac{df}{dx} \Big|_{x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ MA NON SI CONOSCE Δx . SECONDO IL METODO, $\Delta x = \frac{h}{2} F(x_0)$ IN

MODO DA SEMPLIFICARE QUESTA ESPRESSIONE. DUNQUE SOSTITUENDO TUTTO NELL'EQUAZIONE INIZIALE:

$$x(t_0 + h) = x(t_0) + hf(x_0) + \frac{h^2}{2} \left[f' \left(x_0 + \frac{h}{2} f(x_0) \right) - f(x_0) \right] \frac{f(x_0)}{f(x_0)} \cdot \frac{2}{h}$$

$$= x_0 + hf(x_0) + h \left[f' \left(x_0 + \frac{h}{2} f(x_0) \right) - f(x_0) \right]$$

$$= x_0 + hf \left(x_0 + \frac{h}{2} f(x_0) \right)$$

IN PIÙ RISPETTO ALL'APPROSSIMAZIONE PRECEDENTE

$$\Rightarrow x(k+1) = x(k) - h k_e \cdot \left(x(k) + \frac{h}{2} (-k_e x(k)) \right)$$

$$= x(k) - k_e h x(k) + \frac{h^2}{2} k_e^2 x(k)$$

$$= \left[1 - k_e h + \frac{h^2}{2} k_e^2 \right] x(k)$$

IN PIÙ RISPETTO ALL'APPROSSIMAZIONE PRECEDENTE

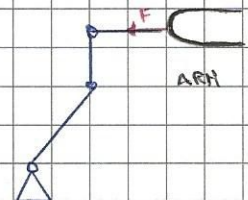
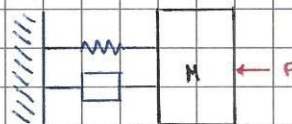
IL TERMINE AGGIUNTIVO PERMETTE DI MAGGIORI.

TRANSPARENCY

LA TRASPARENZA È UN CONCETTO LEGATO ALLA DINAMICA DELL'AMBIENTE COMPOSTO DA UN ROBOT, CHE FUNGE DA INTERFACCIA UTENTE, E, IN QUESTO CASO, UN SIMULATORE VIRTUALE DELL'OGGETTO E DELLA SUA DINAMICA. AN SI DEFINISCE

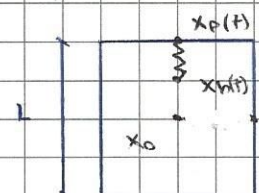
$$F_h = k_h [x_h(t) - x_p(t)]$$

$$x_p = x_0 + \frac{1}{2}$$



LA DINAMICA NEL SIMULATORE È DESCRIVIBILE ATTRAVERSO

$$M \ddot{x}_0(t) = F - B \dot{x}_0(t) - k x_0(t)$$



IL PROBLEMA VIENE AFFRONTATO UTILIZZANDO LA TRASFORMATA DI LAPLACE

LA QUALE PERMETTE DI TRASFORMARE EQ. DIFFERENZIALI IN ALGEBRICHE. PER CON-

DIZIONI INIZIALI PARI A 0:

$$\mathcal{L}[x_0(t)] = x_0(s)$$

$$\mathcal{L}[\dot{x}_0(t)] = s x_0(s)$$

$$\mathcal{L}[\ddot{x}_0(t)] = s^2 x_0(s)$$

$$\Rightarrow M s^2 x_0(s) = F_h(s) - B s x_0(s) - k x_0(s)$$

SI DEFINISCE IMPEDENZA IL RAPPORTO FRA FORZA E VELOCITÀ DELL'OGGETTO:

$$Z = \frac{F}{V} \Rightarrow F(s) = Z(s)V(s)$$

$$F_h(s) = Z(s) \cdot s X_o(s)$$

$$\Rightarrow F_h(s) = MsV(s) + B V(s) + K \frac{V(s)}{s}$$

$$= \left(Ms + B + \frac{K}{s} \right) s X_o(s)$$

IMPEDENZA DELLA DINAMICA

IL PROBLEMA È CHE ESISTONO DUE DINAMICHE: QUELLA DEL ROBOT, LA QUALE DEVE ESSERE IMPERCEPIBILE, E QUELLA DEL SIMULATORE CHE È QUELLA INTERESSANTE. UN SISTEMA SI DEFINISCE

TRASPARENTE SE L'UNICA DINAMICA PERCEPITA È QUELLA DELL'OGGETTO

VIRTUALE. LA DINAMICA REALE È DATA DA

$$I_r \ddot{\theta} = \tau - J^T F - B_r \dot{\theta}$$

DOVE $I_r \ddot{\theta}$ È IL MOMENTO TORCENTE ^{COMPLESSIVO} ~~INERZIALE~~ DALL'INTERFACCIA, τ QUELLO

APPLICATO DAL ROBOT, $J^T F$ QUELLO APPLICATO DALL'UENRE E $B_r \dot{\theta}$ È L'ATTRITO VISCOSO DEI JOINT. APPLICANDO

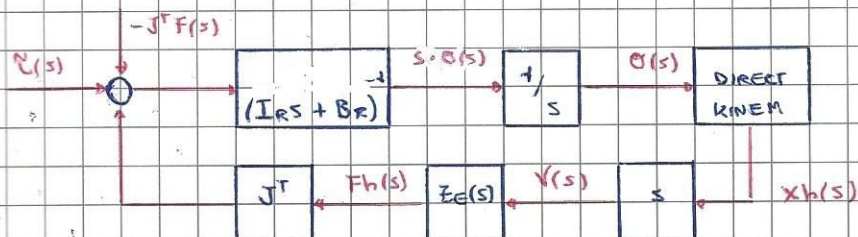
LAPLACE A QUESTA ~~INTERFACCIA~~ EQUATIONE:

$$I_r s^2 \Theta(s) = \tau(s) - J^T F(s) - B_r s \Theta(s)$$

$$(I_r s + B_r) s \Theta(s) = \tau(s) - J^T F(s)$$

$$s \cdot \Theta(s) = (I_r s + B_r)^{-1} [\tau(s) - J^T F(s)]$$

DOVE $(I_r s + B_r)^{-1} = Z_J$ JOINT IMPEDENCE



SE SI ASSUME k_h MOLTO ALTO, ALLORA $k_h(t) = k_p(t)$ E $\dot{x}_h(t) = \dot{x}_p(t) = \dot{x}_o(t)$ IN QUANTO PIÙ RIGIDO.

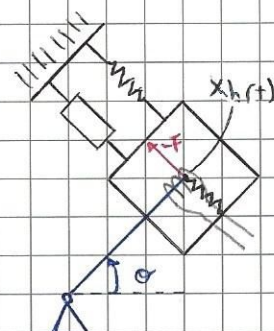
$$F_h(s) = k_h [x_h(s) - x_p(s)]$$

$$= Z_e(s) \cdot s \cdot X_o(s)$$

$$= Z(s) \cdot s \cdot X_h(s)$$

$$\Rightarrow F_h(s) = Z_e(s) \cdot s \cdot X_h(s)$$

DINAMICA DELL'AMBIENTE VIRTUALE



IN REALTÀ LA FORZA PERCEPITA È $F(s) = Z_{HF}(s) s x_h(s)$. SI RIPRENDE LO STUDIO SULL'EFFETTO COMPLESSIVO:

$$J \cdot s \cdot \theta(s) = J \cdot Z_J^{-1} \cdot [\dot{\theta}(s) - J^T F(s)]$$

DALLA JACOBIANA DELLA MANO

$$\Rightarrow s \cdot x_h(s) = J \cdot Z_J^{-1} \dot{\theta}(s) + J Z_J^{-1} J^T (-F)$$

$$v = J \dot{\theta}$$

$$\dot{x}_h(t) = J \dot{\theta}(t)$$

$$\text{POICHÉ } \dot{\theta} = J^T Z_E s x_h(s)$$

$$s x_h(s) = J s \dot{\theta}(t)$$

$$s \cdot x_h(s) = J Z_J^{-1} J^T (-F) + J Z_J^{-1} J^T Z_E s x_h(s)$$

$$\Rightarrow (J^T Z_E J^{-1}) s x_h(s) = -F + Z_E s x_h(s)$$

$$(J Z_E^{-1} J^T)^{-1} = (J^T)^{-1} Z_E J^{-1} = J^{-T} Z_E J^{-1}$$

$$F = \underbrace{(-J^{-T} Z_E J^{-1} + Z_E)}_{Z_{HF}} \cdot s \cdot x_h(s)$$

PER OTTENERE F_H SI DEVE PORTARE $-J^{-T} Z_E J^{-1}$ A 0 E CIÒ È POSSIBILE RIDUCENDO L'INERZIA, OVVERO IL PESO, DEL BRACCIO E L'ATTRITO DEI JOINTS.